第十四章习题

14.1 确定以下通项 u_n 序列的收敛性:

1) $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, 2) $\frac{\ln n}{2^n}$ 3) $n^{\frac{1}{n}}-(n+1)^{\frac{1}{n}}$. 4) $\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$

14.2 研究级数的收敛性,并计算和式

1) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^3-n}$ 2. $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$、 3. $\sum_{n\geq 0}\left(3+(-1)^n\right)^{-n}$

14.3 利用参数 $p\in\mathbb{N}$,研究通项为 $u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$ 的级数.

14.4 利用参数 $p\in\mathbb{N}$,研究以 $u_n=\frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ 为通项的级数的收敛性,并计算其和式.

14.5 设 x 为实数,且 $|x|<1$

1). 通过考察以 x^n 为通项的级数的部分和,证明 $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

2). 用同样的方法,证明级数 $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ 收敛,并给出其和.

3). 计算 $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$.

14.6 设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. 研究以 $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$ 为通项的级数的敛散性、当级数收敛时,计算其和。

14.7 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个序列且其各项非负,记

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$$

1). 证明级数 $\sum_{n\geq 0} v_n$ 收敛,且和式 $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\leq 1$.

2) 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} v_n=1$ 当且仅当 $\sum_{n\geq 0} u_n$ 发散.

14.8 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 为正项的收敛级数. 证明以 $\max(u_n, v_n)$ 和 $\sqrt{u_n v_n}$ 为通项的级数也是收敛的

14.9 研究级数 $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ 的收敛性.

14.10 $n \in \mathbb{N}^*$, 令 $u_n = \begin{cases} -\frac{4}{n}, & 5 \mid n \\ \frac{1}{n}, & \text{其它情形} \end{cases}$.

1) 计算 $\sum_{k=1}^{5n} u_k$

2) 导出 $\sum u_n$ 收敛 并计算 $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

14.11 研究 Riemann 级数, 其通项为

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

14.12 设 $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $u_n = \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$

证明 $\sum u_n$ 收敛. 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

14.13 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 和 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为实数序列. 且.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

设 $\sum u_n$ 和 $\sum w_n$ 收敛. 则. $\sum v_n$ 收敛.

14.14 证明 级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ 发散. 并给出 部分和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ 的简单等价式.

14.15 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]1, +\infty[$. 研究以 $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ 为通项的级数. 给出 u_n 的等价关系式.

14.16 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 研究以 $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ 为通项的级数.

14.17 设 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, 证明以 $u_n = \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha}$ $n \geq 2$ 为通项的级数. ① 当 $\alpha > 1$ 时收敛. ② 当 $\alpha < 1$ 时发散 ③ $\alpha = 1$ 时??

14.18 设 (v_n) 是单调递减于 0 的正序列. $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $u_n = (-1)^n v_n$.

1). 对于 $n \in \mathbb{N}$, 记 $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

证明序列 $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 是~~界~~相邻的.

2). 导出以 u_n 为通项的级数是收敛的

3) 应用: 对于什么样的 $\alpha \in \mathbb{R}$, ~~级数~~ 以 $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ 为通项的级数是收敛的.

14.19 固定 $x \in \mathbb{R}$. 用 Taylor-Lagrange 不等式. 证明:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

14.20 称十进制展开 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为周期的, 如果 $\exists p \in \mathbb{N}^*$, 和 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得.

$$\forall n \geq n_0, \ \beta_n = \beta_{n+p}.$$

1). 证明: 若实数 x 的十进制展开是周期的, 则 $x \in \mathbb{Q}$.

2). 设 $\frac{a}{b}$ 是一个正有理数. $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$

(a). 分别记 β_0 和 α_0 为 a 除以 b 所得的商和余数.

对 $n \in \mathbb{N}^*$, 分别记 β_n 和 α_n 为 $10\alpha_{n-1}$ 除以 b 所得商和余数. 证明 $\frac{a}{b}$ 的十进展开为 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) 导出 $\frac{a}{b}$ 的十进制数展开是周期的.